

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)  
Кафедра Общей физики-1  
Направление «Физика»



## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ СВЕТА ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Бакалаврская работа студента

\_\_\_\_\_ **Кропотова Дмитрия Александровича**

Научный руководитель:

\_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. **Т.Ю. Голубева**

Рецензент:

\_\_\_\_\_ к. ф.-м. н., доц. **Н.В. Ларионов**

Санкт-Петербург  
2017

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Корреляционные функции и их свойства</b>	<b>8</b>
2.1	Фурье преобразование . . . . .	13
2.2	Поля в лазерах, временные и пространственные корреляции света . . .	14
<b>3</b>	<b>Вывод эффективного гамильтониана</b>	<b>22</b>
3.1	Уравнение Шрёдингера с возмущённым Гамильтонаном в представлении взаимодействия . . . . .	22
3.1.1	Разложение волновой функции по степеням возмущения . . . . .	23
3.1.2	Оператор эволюции системы . . . . .	23
3.1.3	Амплитуда рассеяния . . . . .	24
3.2	Эффективный гамильтониан . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Оператор рассеяния</b>	<b>30</b>
4.1	Обозначения . . . . .	30
4.2	Математическое описание . . . . .	31
4.3	Разные представления . . . . .	31
4.4	Теория рассеяния . . . . .	33
4.5	Конкретная система . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Заключение</b> . . . . .	<b>34</b>

# Глава 1

## Введение

Рождением нелинейной оптики считается 1961 год. В 1961 году Франкен и другие провели первый эксперимент по удвоению частоты света на рубидевом лазере [1]. Они обнаружили, что свет из инфракрасного диапазона переводится в ультрафиолетовый. Этот эксперимент положил начало многим экспериментам по получению из волны одной частоты волн с другими частотами, включая эксперимент с получением гармоник высокого порядка в аргоне [2].

В общем смысле параметрическое преобразование - это процессы, проходящие с периодическим изменением параметра системы. В квантовой оптике параметрическое преобразование - преобразование частоты электромагнитного поля за счёт взаимодействия электромагнитного поля и вещества. Рассмотрим взаимодействие электромагнитного поля и вещества с точки зрения классической и квантовой физики. С точки зрения классической физики среда под действием внешнего поля поляризуется, электроны возбуждаются и растягиваются относительно атомных ядер, и диполи колеблются на частоте поля, являясь источником вторичных волн. Также из-за своей нелинейности в приближении квадратичной поляризованности возникают колебания диполей на удвоенных, суммарных и разностных частотах, а в приближениях более высокого порядка колебания с частотами соответствующего порядка и, соответственно, диполи являются источниками вторичных волн на соответствующих частотах. Таким образом, мы преобразовываем частоту.

С точки зрения квантовой теории в линейном приближении по поляризованности происходит поглощение средой соответствующих квантов энергии и их переизлучение. С учётом квадратичной нелинейности среды поглощаются два фотона, одинаковых или разных, а потом переизлучаются, получая вторичные волны на соответствующих частотах. Аналогично происходит в более старших порядках. В квантовой оптике это называется параметрическим резонансом. Другими словами, "параметрический" означает переход энергии от волны накачки к сигнальной волне через среду. При этом состояние среды остаётся постоянным.

Подобные параметрические преобразования можно использовать для разных це-

лей. Например, перенос спектра в оптическую область (параметрическое преобразование частоты) - на нелинейную среду направляются две волны, которые называются опорная(волна накачки) и сигнальная, фотоны которых преобразуются в холостую волну с суммарной частотой. Опорная, сигнальная и холостая волны будут удовлетворять условиям пространственного и фазового синхронизма:

$$\vec{k}_p + \vec{k}_s = \vec{k}_i \quad (1.1)$$

$$w_p + w_s = w_i \quad (1.2)$$

где  $\vec{k}_p$ ,  $w_p$  - волновой вектор и частота волны накачки,  $\vec{k}_s$ ,  $w_s$  - волновой вектор и частота сигнальной волны,  $\vec{k}_i$ ,  $w_i$  - волновой вектор и частота холостой волны.

Также в пример можно привести уширение спектрального диапазона (параметрическая генерация, генерация высших гармоник), усиление волны на данной частоте (параметрическое усиление), спонтанное параметрическое рассеяние (распад фотона на два из-за взаимодействия с так называемыми темновыми фотонами). Темновые фотоны- это фотоны вакуумных мод. Для всех этих процессов должны выполняться условия пространственного и фазового синхронизма.

Рассмотрим подробнее данные процессы. При параметрической генерации фотон накачки с частотой  $\omega_p$  и волновым вектором  $\vec{k}_p$  распадается на два фотона: наблюдаемый с частотой  $\omega_s$  и волновым вектором  $\vec{k}_s$  и холостой с частотой  $\omega_i$  и с волновым вектором  $\vec{k}_i$ . При этом выполняются условия:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (1.3)$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i \quad (1.4)$$

При генерации высших гармоник  $n$  фотонов волны накачки с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\vec{k}$  преобразуются в фотон с частотой  $n\omega$  с волновым вектором  $n\vec{k}$ .

При параметрическом усилении на нелинейную среду направляются интенсивная волна накачки  $\omega_p$  и волновым вектором  $\vec{k}_p$  и слабая сигнальная волна с частотой  $\omega_s$  и волновым вектором  $\vec{k}_s$ . Они преобразуются в холостую волну с частотой  $\omega_i$  и волновым вектором  $\vec{k}_i$ .

$$\omega_i = \omega_p + \omega_s \quad (1.5)$$

$$\vec{k}_i = \vec{k}_p + \vec{k}_s \quad (1.6)$$

Дальше холостая волна взаимодействует с волной накачки с сохранением условий (1.5) и (1.6) и образуются фотоны сигнальной волны. Таким образом, энергия волны накачки через холостую волну передаётся сигнальной. В 1965 году С. А. Ахматовым, А. И. Ковригиным и другими в МГУ был проведён эксперимент по усилению сигнальной волны волной накачки в кристалле КРД( $KH_2PO_4$ )[3].



При спонтанном параметрическом рассеянии волна накачки с частотой  $\omega_p$  и волновым вектором  $\vec{k}_p$  преобразуется в две волны: наблюдаемую с частотой  $\omega_s$  и волновым вектором  $\vec{k}_s$  и холостую с частотой  $\omega_i$  и с волновым вектором  $\vec{k}_i$ . При этом выполняются условия: с частотами  $\omega_s$  и  $\omega_i$  и волновыми векторами  $\vec{k}_s$  и  $\vec{k}_i$ .

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (1.7)$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i \quad (1.8)$$

Если получившиеся фотоны обладают одинаковой поляризацией, то это спонтанное параметрическое рассеяние первого типа, если разной, то второго.

В 1965 году Гиордмэйн и Роберт получили гармонические когерентные параметрические осцилляции (распад фотона волны накачки на два фотона) [4] в кристалле ниобата натрия. Для этого им нужен был усилитель. В качестве усилителя они использовали резонатор. Получившиеся фотоны называются сигнальным и холостым.

Опишем эволюцию сигнальной и холостой волн. Изначально они находятся в вакуумном состоянии

$$|0_i\rangle |0_s\rangle$$

Мы вводим эффективный гамильтониан [5]

$$H = \hbar(k a_p a_i^\dagger a_s^\dagger + k^* a_p^\dagger a_i a_s) \quad (1.9)$$

где  $a_p$  - оператор уничтожения фотона волны накачки,  $\hat{a}_s^\dagger$  - оператор рождения фотона сигнальной волны,  $\hat{a}_i^\dagger$  - оператор рождения фотона холостой волны, где  $\hat{a}_p^\dagger$  - оператор рождения фотона волны накачки,  $\hat{a}_s$  - оператор уничтожения фотона сигнальной волны,  $\hat{a}_i$  - оператор уничтожения фотона холостой волны.

Подействуем оператором развития

$$U(t) \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) \quad (1.10)$$

на начальную волновую функцию системы

$$|\psi_{in}\rangle = |\alpha_p\rangle |0_i\rangle |0_s\rangle \quad (1.11)$$

где  $|\alpha_p\rangle$  - когерентное состояние с комплексной амплитудой

$$\alpha = |\alpha| \exp i\theta \quad (1.12)$$

и получим

$$|\psi_{out}\rangle = U(t)|\psi_{in}\rangle = |\alpha_p\rangle |\psi\rangle \quad (1.13)$$

где волновую функцию можно представить в виде разложения Шмидта [5]

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_m \sqrt{\lambda_m} |1_{m_i}\rangle |1_{m_s}\rangle \quad (1.14)$$

Разложение (1.14) означает, что рождаются пары фотонов холостой и сигнальной волн  $|1_{m_i} \rangle |1_{m_s} \rangle$ , называемые бифотонами, причём  $\lambda_m$  - вероятность рождения бифотона. Если в разложении (1.14) одно слагаемое, то говорят, поле находится в факторизованном состоянии, если больше, чем одно, то говорят, поле находится в перепутанном состоянии.

В восьмидесятых две группы в Токио и в Нью-Йорке получили независимо друг от друга [6], [7] спонтанный распад фотона в кристалле на два фотона, которые как и в случае с когерентными оптическими осцилляциями, называются сигнальным и холостым (по другому процесс называется спонтанное параметрическое рассеяние или параметрическая флюоресценция). Этот эффект примечателен тем, что распад происходит из-за взаимодействия фотона накачки с холостыми темновыми фотонами. Образовавшаяся поле бифотонов тоже находится в квантовой перепутанности.

В 1964 году Робль рассмотрел прямое каскадное гиперпараметрическое рассеяние (ГПР) [8]. Впервые оно было получено Грибергом и другими в кристалле сульфида кадмия в 1968 году [9]. Его можно описать кубической поляризацией. При ГПР на нелинейную среду подаются две волны накачки с частотами  $\omega_{1p}$  и  $\omega_{2p}$  и волновыми векторами  $\vec{k}_{1p}$  и  $\vec{k}_{2p}$  превращаются в волны с частотами  $\omega_s$  и  $\omega_i$  и волновыми векторами  $\vec{k}_s$  и  $\vec{k}_i$ . Причём

$$\omega_{1p} + \omega_{2p} = \omega_s + \omega_i \quad (1.15)$$

$$\vec{k}_{1p} + \vec{k}_{2p} = \vec{k}_s + \vec{k}_i \quad (1.16)$$

В таком процессе наблюдается генерация третьей гармоники.

Генерация третьей гармоники была получена в 1967 году Дж. Х. К. Нью и Дж. Ф. Вардом в таких газах как гелий, неон, аргон, криптон, неон [10]. Третья гармоника была предсказана Мэйкером, Терхуне и Саваджем. Третью гармонику тоже описывается кубической поляризацией. Как было сказано выше, среда поглощает три фотона с частотой  $\omega$  и испускает один с частотой  $3\omega$ .

Все описанные выше эффекты являются когерентными, то есть разность фаз в них считается постоянной, волны монохроматичны и направлены. Параметрическое взаимодействие световых волн в нелинейных средах, как правило, слабое, высокая вероятность СПР достигается лишь при больших временах взаимодействия (гораздо больше периода колебаний) и при размерах взаимодействия гораздо больше длины волны излучения. При этом нужна когерентность взаимодействующих мод, чтобы фазы волн в разные моменты пространства-времени складывались синфазно [5]. Для этого необходимо, чтобы в нелинейной среде были выполнены условия пространственного и фазового синхронизма, то есть сумма волновых векторов и частот волн, поглощённых нелинейной средой равнялась сумме волновых векторов и частот волн, сгенерированных средой.

$$\sum_{l=1} n\omega_l = \sum_{s=1} m\omega_s \quad (1.17)$$

$$\sum_{l=1} n \vec{k}_l = \sum_{s=1} m \vec{k}_s \quad (1.18)$$

Это возможно только в одноосных кристаллах с использованием второй гармоники необыкновенных волн.

Кристалл - это анизотропная среда, то есть среда, в которой направление распространения света зависит от поляризации падающего света. Другими словами, у кристалла диэлектрическая проницаемость - тензор, а не число. То есть он представляется матрицей. Её можно диагонализировать, что физически означает, выделить собственные оси кристалла. Компоненты вектора поляризованности  $P$  по этим осям пропорциональны соответствующим компонентам вектора напряжённости  $E$ . Кристаллы бывают одноосными и двуосными. У одноосного кристалла две компоненты диагонализированного тензора (обозначим их  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$ ) совпадают.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \equiv \epsilon_{\perp} \quad (1.19)$$

Третья ось кристалла называется собственной или оптической, причём

$$\epsilon_{zz} \equiv \epsilon_{\parallel} \neq \epsilon_{xx} \quad (1.20)$$

Коэффициент преломления волны, распространяющейся по его собственной оси равен

$$n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel}} \quad (1.21)$$

Коэффициент преломления волны, распространяющейся по его собственной оси равен

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \quad (1.22)$$

Если волна в кристалле распространяется перпендикулярно собственной оси, то она называется обыкновенной, и её фазовая скорость равна

$$V_{ph} = \frac{c}{n_0} \quad (1.23)$$

$c$  - скорость света в вакууме. При изменении угла распространения относительно собственной оси  $\theta$  её фазовая скорость начнёт меняться в зависимости от угла с собственной осью. Волна, не перпендикулярная собственной оси, называется необыкновенной. Обеспечить выполнение пространственного синхронизма можно с помощью угловой зависимости коэффициента преломления необыкновенных волн.

$$n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}})}} \quad (1.24)$$

У двуосного кристалла не совпадают все три показателя преломления. С помощью них тоже можно создать условия пространственного и фазового синхронизма.

Дипломная работа организована следующим образом. В главе 2 рассмотрены корреляционные функции и их свойства, в главе 3 дан вывод эффективного гамильтониана, в 4 главе проведён расчёт интенсивности поля накачки для экспериментальной установки, и в конце написано заключение.

## Глава 2

# Корреляционные функции и их свойства

Проведём мысленный эксперимент  $N$  раз. В каждом эксперименте мы наблюдаем значения двух случайных величин:  $x$  и  $y$ . Рассмотрим вероятность того, что величина  $a$  находится в диапазоне от  $x$  до  $x + \Delta x$ , а величина  $b$  от  $y$  до  $y + \Delta y$  [11].

$$x \leq a \leq x + \Delta x \quad (2.1)$$

$$y \leq b \leq y + \Delta y \quad (2.2)$$

Назовём попадание  $a$  в указанный диапазон событием  $A$ , попадание  $b$  в указанный диапазон событием  $B$ . Обозначим количество выпадения события  $A$  через  $N_A$ , количество выпадения события  $B$  через  $N_B$ , количество выпадения и  $A$ , и  $B$  одновременно (назовём такое событие  $C$ ) через  $N_{AB}$ .

При  $N, N_A, N_B, N_{AB}$ , стремящихся в бесконечность вероятность события  $A$   $p_A(x)$  равна

$$p_A(x) = \frac{N_A}{N} \quad (2.3)$$

вероятность события  $B$   $p_B(y)$  равна

$$p_B(y) = \frac{N_B}{N} \quad (2.4)$$

вероятность события  $C$   $p_{AB}(x, y)$  равна

$$p_{AB}(x, y) = \frac{N_{AB}}{N} \quad (2.5)$$

Несложными преобразованиями получим

$$p_{AB}(x, y) = p_{A|B}(x|y)p_B(y) = p_{B|A}(y|x)p_A(x) \quad (2.6)$$

где

$$p_{A|B}(x|y) = \frac{N_{AB}}{N_B} \quad (2.7)$$

$$p_{B|A}(y|x) = \frac{N_{AB}}{N_A} \quad (2.8)$$

$p_{A|B}(x|y)$  и  $p_{B|A}(y|x)$ - условные вероятности (вероятность события  $A$  при произошедшем  $B$  и вероятность события  $B$  при произошедшем  $A$ ) [11].

При этом можно перейти к плотностям вероятности, продифференцировав (2.3), (2.4) и (2.6). При этом в  $p_{A|B}(x|y)$   $y$  - это параметр, а в  $p_{B|A}(y|x)$   $x$  - это параметр.

$$P_A(x) \equiv \frac{dp_A(x)}{dx} \quad (2.9)$$

$$P_B(y) \equiv \frac{dp_B(y)}{dy} \quad (2.10)$$

Сделаем промежуточные выкладки

$$P_{A|B}(x|y) \equiv \frac{dp_{A|B}(x|y)}{dx} \quad (2.11)$$

$$P_{B|A}(y|x) \equiv \frac{dp_{B|A}(y|x)}{dy} \quad (2.12)$$

и получим

$$P_{AB}(x, y) \equiv \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x \partial y} = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \quad (2.13)$$

Теперь рассмотрим две случайные величины  $x$  и  $y$  с плотностями распределения  $P_A(x)$  и  $P_B(y)$ . Между ними вводится коэффициент корреляции

$$B_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \times \bar{y} \quad (2.14)$$

где  $\overline{xy}$  - среднее значение произведения  $x$  и  $y$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  - средние значения  $x$  и  $y$  [11].

Выражение (2.14) может принимать значения [11]

$$-\sqrt{D(x)D(y)} \leq B_{xy} \leq \sqrt{D(x)D(y)} \quad (2.15)$$

где  $D(x)$  и  $D(y)$  - дисперсии  $x$  и  $y$

$$D(x) \equiv E((x - \hat{x})^2) \quad (2.16)$$

$$D(y) \equiv E((y - \hat{y})^2) \quad (2.17)$$

Воспользовавшись (2.9), (2.10) и (2.13), перепишем (2.14)

$$B_{xy} = \int P_B(y)y \int P_{A|B}(x|y)xdxdy - \int P_A(x)xdx \int P_B(y)ydy \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

$$= \int \int (P_{A|B}(x|y) - P_A(x))xdxP_B(y)ydy \quad (2.20)$$

Из этой формулы очевидно, что коэффициент корреляции равен нулю тогда и только тогда, когда

$$P(x|y) = P(x) \quad (2.21)$$

т. е. распределение  $x$  не зависит от значения  $y$  или, по-другому,  $x$  и  $y$  статистически независимы.

Если  $x$  и  $y$  - значения одного и того же процесса  $f(t)$  в разные моменты времени, т. е.

$$x = f(t) \quad (2.22)$$

$$y = f(t + \tau) \quad (2.23)$$

то для него вводится корреляционная функция [11]

$$B_{xy}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} - \overline{f(t)} \times \overline{f(t+\tau)} \quad (2.24)$$

Заметим, что здесь идёт усреднение по времени  $t$ , поэтому (2.24) зависит только от  $\tau$ . Можно вычислить  $B_{xy}(-\tau)$

$$B_{xy}(-\tau) = \overline{f(t)f(t-\tau)} - \overline{f(t)} \times \overline{f(t-\tau)} = [t_{new} = t - \tau] = \quad (2.25)$$

$$\quad (2.26)$$

$$= \overline{f(t_{new})f(t_{new} + \tau)} - \overline{f(t_{new})} \times \overline{f(t_{new} + \tau)} = B_{xy}(\tau) \quad (2.27)$$

Из этого мы делаем вывод

$$B(\tau) = B(-\tau) \quad (2.28)$$

[11]

Выражение (2.24) переписывается

$$B_{xy}(\tau) = \overline{f f_\tau} - \overline{f} \times \overline{f_\tau} \quad (2.29)$$

где

$$f \equiv f(t) \quad (2.30)$$

$$f_\tau \equiv f(t + \tau) \quad (2.31)$$

[11]

Если  $x$  и  $y$  зависят от разных переменных -  $t_1$  и  $t_2$  соответственно, то

$$B_{xy} = \overline{x(t_1)y(t_2)} - \overline{x(t_1)} \times \overline{y(t_2)} \quad (2.32)$$

Обозначим плотность распределения  $t_1$  за  $P_A(t_1)$ , плотность распределения  $t_2$  за  $P_B(t_2)$ , плотность распределения произведения  $t_1$  на  $t_2$  за  $P_{AB}(t_1, t_2)$ . Перепишем выражение (2.32) через интегралы

$$B_{xy} = \int \int P_{AB}(t_1, t_2) x(t_1) y(t_2) dt_1 dt_2 - \int \int P_A(t_1) x(t_1) P_B(t_2) y(t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.33)$$

Также в качестве корреляционной функции принято рассматривать выражение [11]

$$\psi(\tau) = \overline{f f_\tau} \quad (2.34)$$

Это первая часть выражения (2.29).

Аналогом этой функции будет

$$\Gamma^{1,1} = \int \int P_{AB}(t_1, t_2) x_1(t_1) x_2(t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.35)$$

(Первая часть выражения (2.33))

Также можно ввести корреляционные тройные, четверные корреляционные функции [11]. Для случая тройных корреляционных функций и  $t_1 = t_2 = t_3$

$$\psi(t, \tau_1, \tau_2) = \overline{f(t)f(t + \tau_1)f(t + \tau_2)} \quad (2.36)$$

[11] Аналог для  $m + n$ -ной функции будет

$$\Gamma^{m,n} = \int \cdots \int P_{A_1 \cdots A_{m+n}}(t_1, \cdots, t_{m+n}) \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

$$\times x_1(t_1) \cdots x_{m+n}(t_{m+n}) dt_1 \cdots dt_{m+n} \quad (2.39)$$

Можно ввести корреляционные функции более старших порядков. Например корреляционная функция  $n$ -ного порядка будет

$$\overline{x^n(t)x^n(t + \tau)} \quad (2.40)$$

Такие корреляционные функции большое значение имеют в радиотехнике и особенно в оптике [11].

Теперь рассмотрим, как корреляционные функции применяются к физике. Можно считать, что  $P_A(t_1)$ ,  $P_B(t_2)$ ,  $P_{AB}(t_1, t_2)$  - плотности распределения классических физических величин  $t_1$ ,  $t_2$  и их перекрытия. Если переходить к квантовым величинам, нужно заменить плотность вероятностей матрицей плотности, интегралы шпуром, физические величины их операторами (см., например, [12]).

Теперь (2.39) переписывается

$$\langle \hat{x}_1(t_1) \cdots \hat{x}_{m+n}(t_{m+n}) \rangle = Tr(\hat{\rho}(t_1, \cdots, t_{m+n}) \hat{x}_1(t_1) \cdots \hat{x}_{m+n}(t_{m+n})) \quad (2.41)$$

Это выражение будем называть квантовой корреляционной функцией.

Также удобно пользоваться двумя типами корреляционных функций. Если  $\hat{x}_1(t)$  и  $\hat{x}_2(t)$  - операторы двух физических величин, то можно ввести две корреляционные функции [13]

$$\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{t>0} = Tr(\hat{\rho}(0) \hat{x}_1(t) \hat{x}_2(0)) \quad (2.42)$$

$$\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_{t<0} = Tr(\hat{\rho}(0) \hat{x}_1(0) \hat{x}_2(t)) \quad (2.43)$$

Рассмотрим детектор, который поглощает фотоны. Пусть поле характеризуется начальным состоянием поля  $|i\rangle$ , и оно переходит в состояние  $|f\rangle$ . Тогда амплитуда перехода из состояния  $|f\rangle$  в состояние  $|i\rangle$ .

$$\langle f | \hat{a} | i \rangle \quad (2.44)$$

$\hat{a}$  - оператор уничтожения, а вероятность  $p$  такого перехода [14]

Тогда амплитуда вероятности перехода будет

$$p = | \langle f | \hat{a} | i \rangle |^2 \quad (2.45)$$

Поскольку мы не знаем конечное состояние поля  $|f\rangle$  [14] и у нас есть условие полноты

$$\sum_f |f\rangle \langle f| = \hat{I}, \quad (2.46)$$

то

$$\sum_f \langle i | \hat{a}^* | f \rangle \langle f | \hat{a} | i \rangle = \langle i | \hat{a} \hat{a}^* | i \rangle, \quad (2.47)$$

а начальное состояние  $|i\rangle$  может зависеть от многих случайных факторов, то вероятность переписывается через матрицу плотности  $\hat{\rho}$

$$\langle i | \hat{a}^* \hat{a} | i \rangle_p = Tr(\hat{\rho} \hat{a}^* \hat{a}), \quad (2.48)$$

причём матрица плотности представляется через собственные состояния

$$\hat{\rho} = \sum_m \sum_k c_{mk} |i_m\rangle \langle i_k|. \quad (2.49)$$

Поглощение происходит в некоторой точке пространства-времени  $(x, t)$ . Обозначим его за  $x$ .

$$(x, t) \equiv x \quad (2.50)$$

Теперь (2.48) переписывается

$$\langle i | \hat{a}(x) \hat{a}^*(x) | i \rangle_p = Tr(\hat{\rho} \hat{a}(x) \hat{a}^*(x)) \quad (2.51)$$

Эта вероятность эквивалентна в частном случае (при  $x = x'$ ) квантовой корреляционной функции [14]

$$\Gamma_N^{(1,1)}(x, x') = Tr(\hat{\rho} \hat{a}(x) \hat{a}^*(x')) \quad (2.52)$$

Выражение (2.52) - флуктуация для двух переменных.

Рассмотрим задачу на собственные числа и собственные функции собственного состояния когерентного поля [14].  $V(x)$  - классические поля, собственные числа операторов уничтожения

$$\hat{a}(x) | \alpha_\lambda \rangle = V(x) | \alpha_\lambda \rangle \quad (2.53)$$

$$\langle \alpha_\lambda^* | \hat{a}^*(x) = \langle \alpha_\lambda^* | V^*(x) \quad (2.54)$$

$\alpha_\lambda$  - собственные состояния когерентного поля [14]. Заменяя в (2.52) матрицу плотности на классическую плотность вероятности, а оператор рождения и уничтожения на собственные числа операторов рождения и уничтожения, получим классическую формулу для среднего.

$$\Gamma_N^{(1,1)}(x, x') = \int \int dx_1 dx_2 P(x, x') V(x) V^*(x') \equiv \langle V(x) V^*(x') \rangle \quad (2.55)$$



Теперь предположим, что в точке пространства-времени  $(x_1, t_1) \equiv x_1$  поглощается первый фотон, в точке пространства-времени  $(x_2, t_2) \equiv x_2$  поглощается второй фотон и так далее и, наконец, в точке  $(x_n, t_n) \equiv x_n$  поглощается  $n$ -ный фотон. [14]

Для описания этого перехода рассмотрим переход атома из состояния  $|i\rangle$  в состояние  $|f\rangle$ . Запишем амплитуду вероятности

$$\langle f | \hat{a}_n^*(x_n) \hat{a}_{n-1}^*(x_{n-1}) \cdots \hat{a}_1^*(x_1) | i \rangle \quad (2.56)$$

Рассуждая аналогично случаю однофотонного поглощения, получим вероятность такого перехода

$$\langle i | \hat{a}(x_1) \hat{a}(x_2) \cdots \hat{a}(x_n) \hat{a}^*(x_n) \hat{a}^*(x_{n-1}) \cdots \hat{a}^*(x_1) | i \rangle_p \quad (2.57)$$

$$= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}(x_1) \hat{a}(x_2) \cdots \hat{a}(x_n) \hat{a}^*(x_n) \hat{a}^*(x_{n-1}) \cdots \hat{a}^*(x_1)) \quad (2.58)$$

Эта вероятность эквивалентна при  $n = m$ ,  $x_j = x_{j+m}$  квантовой корреляционной функции для  $n + m$  переменных [14]

$$\Gamma_N^{(m,n)}(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}(x_1) \cdots \hat{a}(x_m) \hat{a}^*(x_{m+1}) \cdots \hat{a}^*(x_{m+n})) \quad (2.59)$$

## 2.1 Фурье преобразование

Теперь у операторов рождения и уничтожения будем писать в аргументах  $x, t$ , а не просто  $x$ . У операторов рождения можно ввести Фурье-преобразование [14]

$$\hat{a}^*(x, \nu) \equiv \int_0^\infty \hat{a}^*(x, t) \exp(i2\pi\nu t) dt \quad (2.60)$$

Обратным Фурье-преобразованием будет [14]

$$\hat{a}^*(x, t) \equiv \int_0^\infty \hat{a}^*(x, \nu) \exp(-i2\pi\nu t) d\nu \quad (2.61)$$

Чтобы найти преобразования Фурье для операторов уничтожения, сопряжём выражения (2.60) и (2.61), и знаки в экспонентах в прямом и обратном преобразованиях поменяются местами.

$$\hat{a}(x, \nu) \equiv \int_0^\infty \hat{a}(x, t) \exp(-i2\pi\nu t) dt \quad (2.62)$$

$$\hat{a}(x, t) \equiv \int_0^\infty \hat{a}(x, \nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu \quad (2.63)$$

Тогда Фурье-образ (2.59) будет [14]

$$\begin{aligned} G_N^{(m,n)}(x_1, \cdots, x_{m+n}, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m+n}) &= \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Gamma_N^{(m,n)}(x_1, \cdots, x_{m+n}, t_1, t_2, \cdots, t_{m+n}) \exp(-i2\pi \sum_{k=1}^{m+n} (\nu_k t_k)) d^{m+n}t \\ &= \text{Tr}(\hat{\rho}(\hat{a}(x_1, \nu_1), \cdots, \hat{a}(x_{m+n}, \nu_{m+n})) \prod_{k=1}^m \hat{a}_k \prod_{k=m+1}^{m+n} \hat{a}_k^*) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Обратное преобразование Фурье для квантовой корреляционной функции (2.59)

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{(m,n)}(x_1, \dots, x_{m+n}, t_1, \dots, t_{m+n}) \\ = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty G_N^{(m,n)}(x_1, \dots, x_{m+n}, \nu_1, \dots, \nu_{m+n}) \exp(i2\pi \sum_{k=1}^{m+n} (\nu_k t_k)) d^{m+n} \nu \end{aligned} \quad (2.65)$$

Это выражение называется обобщённой теоремой Винера-Хинчина [14].

Рассмотрим случай стационарного оптического поля. Стационарное оптическое поле означает, что корреляционная функция для квантовых величин (2.41) не зависит от сдвига по времени. [14]

$$\begin{aligned} \Gamma_N^{(m,n)}(t_1, \dots, t_{m+n}) = \text{Tr}(\widehat{\rho}(t_1, \dots, t_{m+n}) \widehat{x}_1(t_1) \dots \widehat{x}_{m+n}(t_{m+n})) = \\ \text{Tr}(\widehat{\rho}(t_1 + \tau, \dots, t_{m+n} + \tau) \widehat{x}_1(t_1 + \tau) \dots \widehat{x}_{m+n}(t_{m+n} + \tau)) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Подставляя это условие в (2.65), получаем

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty G_N^{(m,n)}(x_1, \dots, x_{m+n}, \nu_1, \dots, \nu_{m+n}) \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} * \exp(i2\pi \sum_{k=1}^{m+n} (\nu_k t_k)) d^{m+n} \nu = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty G_N^{(m,n)}(x_1, \dots, x_{m+n}, \nu_1, \dots, \nu_{m+n}) \\ * \exp(i2\pi (\sum_{k=1}^{m+n} (\nu_k t_k) + \sum_j \epsilon_j \nu_j \tau)) d^{m+n} \nu \end{aligned} \quad (2.68)$$

для любого  $\tau$ , где

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1 \dots m \\ -1 & \text{при } j = m + 1 \dots m + n \end{cases} \quad (2.69)$$

Из этого делаем вывод, что

$$\sum \epsilon_j \nu_j = 0 \quad (2.70)$$

Получается, это необходимое и достаточное условие того, что Фурье-образы операторов рождения и уничтожения  $\widehat{a}^*(\nu_1), \dots, \widehat{a}^*(\nu_m)$  и  $\widehat{a}(\nu_1), \dots, \widehat{a}(\nu_m)$  коммутировали [14], так как оптическое поле стационарно.

## 2.2 Поля в лазерах, временные и пространственные корреляции света

Рассмотрим пустой кольцевой резонатор, на который падает волна с напряжённостью  $E^{in}(t)$ . Направим ось  $z$  по оптической оси резонатора, по которой направлено внешнее поле и возьмём начало оординат на полупрозрачном зеркале [15]. Пусть  $\tau$  - коэффициент пропускания зеркала резонатора,  $R$  - коэффициент отражения зеркала

резонатора,  $L$  - длина обхода светом резонатора,  $E(z, t)$  - внутреннее поле резонатора. Запишем уравнение для резонатора [15].

$$E(0, t) = \sqrt{\tau} E^{in}(0, t) + \sqrt{R} E(L, t) \quad (2.71)$$

У внешнего поля мы тоже ввели пространственную координату. Перейдём к медленным огибающим [15]

$$E^{in}(0, t) = A(0, t) \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.72)$$

$$E(0, t) = A(0, t) \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.73)$$

$$E(L, t) = A(0, t - T_R) \exp(-i\omega_0(t - T_{ph})) \quad (2.74)$$

$T_R$  - время обхода резонатора. Считаем, что  $\omega_0$  - собственная частота резонатора.  $T_{ph}$  - время прохода фазы длины резонатора. Для пустого резонатора  $T_0$  и  $T_{ph}$  совпадают [15]. Подставляя (2.72), (2.73) и (2.74) в (2.71), получаем [15]

$$A(t) = \sqrt{\tau} A^{in}(t) + \sqrt{R} A(t - T_R) \quad (2.75)$$

Это уравнение можно решать через Фурье-преобразование [15], а можно представить амплитуду поля внутри резонатора внешнего поля в виде суммы огибающих [15], что мы и сделаем

$$A(t) = \sum_n A_n(t - nT_R) \quad (2.76)$$

$$A^{(in)}(t) = \sum_l A_l(t - lT_R) \quad (2.77)$$

Огибающие - последовательность импульсов во времени [15]. Подставив (2.76) и (2.77) в (2.75), получим

$$\sum_n A_n(t - nT_R) = \sqrt{\tau} \sum_l A_l(t - lT_R) + \sqrt{R} \sum_m A_m(t - (m + 1)T_R) \quad (2.78)$$

Приравнивая во всех трёх слагаемых одинаковые числовые коэффициенты, получим [15]

$$A_n(t - nT_R) = \sqrt{\tau} A_n^{in}(t - nT_R) + \sqrt{R} A_{n-1}(t - nT_R) \quad (2.79)$$

Сделаем нехитрое математическое преобразование

$$\frac{A_n(t - nT_R) - A_{n-1}(t - nT_R)}{T_R} = \frac{\sqrt{\tau} A_n^{in}(t - nT_R)}{T_R} + \frac{(\sqrt{R} - 1) A_{n-1}(t - (n - 1)T_R)}{T_R} \quad (2.80)$$

Предположим, что коэффициент отражения зеркала мал. Это означает, что поле внутри резонатора при обходе меняется слабо и зависимость от дискретного номера импульса  $n$  можно заменить зависимостью от непрерывного параметра  $T$  [15].

$$A_n(t - nT_R) \rightarrow A(t, T) \quad (2.81)$$

Дальше можно сделать предельный переход [15].

$$\frac{A_n(t - nT_R) - A_{n-1}(t - nT_R)}{T_R} \rightarrow \frac{\partial A_n(t, T)}{\partial T} \quad (2.82)$$

Уравнение (2.80) преобразуется в [15]

$$\sqrt{\frac{\partial A(t, T)}{\partial T}} = -kA(t, T) + \sqrt{\frac{2k}{T_R}} A^{(in)}(t, T) \quad (2.83)$$

причём [15]

$$k = \frac{\tau}{2T_R} \quad (2.84)$$

Решение (2.83) есть [15]

$$A(t, T) = A(t, 0) \exp(-kT) + \sqrt{\frac{2k}{T_R}} \int_0^T A^{(in)}(t, T') \exp(-k(T - T')) dT' \quad (2.85)$$

В качестве источника поля  $A^{(in)}(t)$  может быть использовано вакуумное поле. Источник поля  $\hat{F}_r(t)$  связан с вакуумными флуктуациями поля  $\hat{A}_r^{vac}(t)$  следующим образом [15]:

$$\hat{F}_r(t) = \frac{\sqrt{\tau_r}}{T_R} \hat{A}_r^{vac}(t) \approx \sqrt{\frac{2k_r}{T_R}} \hat{A}_r^{vac}(t) \quad (2.86)$$

Вакуумные флуктуации обладают следующим свойством [15]

$$\langle \hat{A}_r^{vac}(t) \hat{A}_r^{vac+}(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (2.87)$$

Из этого можно вывести, что источники поля обладают следующим свойством [15].

$$\langle \hat{F}_{r,n}(t - nT_R) \hat{F}_{r,n}^\dagger(t' - n'T_R) \rangle = \frac{2k_r}{T_R} T_R \delta(t - t') \delta(T - T') \quad (2.88)$$

Рассмотрим взаимодействие волны накачки  $\omega_p$  в нелинейной среде с сигнальной волной  $\omega_s$ , которая в два раза меньше волны накачки. Запишем волновое уравнение в изотропной среде для напряжённости  $E(z, t)$  электромагнитного поля, распространяющейся вдоль оси  $z$  [15].

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2} \quad (2.89)$$

$c$  - скорость света в вакууме,  $t$  - время,  $P(z, t)$  - поляризуемость среды. Линейная поляризуемость среды будет [15]

$$P_r(z, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty d\tau \chi_r(\tau) E_r(z, t - \tau) \quad (2.90)$$

где  $r = s, t$ ,  $\chi_r$  - линейная восприимчивость среды [15]. Квадратичная поляризуемость [15]

$$P^{(2)}(z, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \int_0^\infty d\tau_1 d\tau_2 \chi^{(2)}(\tau_1, \tau_2) E(z, t - \tau_1) E(z, t - \tau_1 - \tau_2) \quad (2.91)$$

где  $\chi^{(2)}(\tau_1, \tau_2)$  - квадратичная поляризуемость,

$$E = E_s + E_p \quad (2.92)$$

[15] Возьмём напряжённости сигнальной волны и волны накачки в виде медленных огибающих  $A_r(z, t)$

$$E_r(z, t) = A_r(z, t) \exp(-i(\omega_r t - k_r z)) \quad (2.93)$$

где

$$k_r = \frac{n_r(\omega_r)\omega_r}{c} \quad (2.94)$$

волновой вектор волны

Подставив (2.90), (2.91) и (2.92) в (2.89), получим [15]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_p} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\beta_p}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_p(z, t) = -\sigma A_s^2(z, t) \exp(-i\Delta k z) \quad (2.95)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_s} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\beta_p}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_s(z, t) = 2\sigma A_p(z, t) A_s^\dagger(z, t) \exp(i\Delta k z) \quad (2.96)$$

где

$$\Delta k = k_p - 2k_s \quad (2.97)$$

фазовое рассогласование полей [15]

$$\sigma = \frac{\chi^{(2)}}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_p \omega_s^2}{2\epsilon_0 c S n_p n_s^2}} = const. \quad (2.98)$$

$v_r$  - групповая скорость,  $\beta_r$  - дисперсия групповой скорости [15]

$$v_r^{-1} = \frac{\partial k_r(\omega)}{\partial \omega} \quad (2.99)$$

Для тонкого кристалла можно пренебречь дисперсионным членом  $\beta_r$ , считая, что выполняется условие фазового синхронизма, т. е.  $\Delta k = 0$  и переходя к замене [15]

$$\eta = t - \frac{z}{v} \quad (2.100)$$

мы получим из уравнений (2.95), (2.96) [15]

$$\frac{\partial}{\partial z} A_p(z, \eta) = -\sigma A_s^2(0, \eta) \exp(-i\Delta k z) \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A_s(z, t) = 2\sigma A_p(0, \eta) A_s^\dagger(0, \eta) \exp(i\Delta k z) \quad (2.102)$$

Если помимо того, что кристалл тонкий, накачка очень мощная, решение (2.102) будет [15]

$$A_s(l, t) = \cosh(2\sigma l |A_p(0, t - T_l)|) A_s(0, t - T_l) + \sinh(2\sigma l |A_p(0, t - T_l)|) \times \exp(i\phi_p(t - T_l) A_s^\dagger(0, t - T_l)) \quad (2.103)$$

В лазере огибающая импульса сигнальной волны описывается уравнением Гайзенберга - Ланжевена, полученное по аналогии с уравнением (2.83)

$$\frac{\partial \hat{A}_s(t, T)}{\partial T} = -k_s \hat{A}_s(t, T) + 2g A_0(t, T) \hat{A}_s(t, T) + \hat{F}_s(t, T) \quad (2.104)$$

$A_0(t, T)$  - классическая амплитуда внешней волны накачки,  $g$  - константа, характеризующая параметрическое преобразования поля волны накачки [15].

Это уравнение будем решать в виде суммы квадратур  $\hat{X}_s(t, T)$  и  $\hat{Y}_s(t, T)$  [15]

$$\hat{A}_s(t, T) = \hat{X}_s(t, T) + i\hat{Y}_s(t, T) \quad (2.105)$$

где  $\hat{X}_s(t, T)$  и  $\hat{Y}_s(t, T)$  определяются следующим образом [15]

$$\hat{X}_s(t, T) = \frac{1}{2}(\exp(-i\phi_{in}(t)/2)\hat{A}_s(t, T) + \exp(i\phi_{in}(t)/2)\hat{A}_s^\dagger(t, T)) \quad (2.106)$$

$$\hat{Y}_s(t, T) = \frac{1}{2i}(\exp(-i\phi_{in}(t)/2)\hat{A}_s(t, T) - \exp(i\phi_{in}(t)/2)\hat{A}_s^\dagger(t, T)) \quad (2.107)$$

$\hat{X}_s(t, T)$  - самосопряжённый оператор,  $\hat{Y}_s(t, T)$  - антисамосопряжённый

$$\hat{X}(t) = \hat{X}^\dagger(t) \quad (2.108)$$

$$\hat{Y}(t) = -\hat{Y}^\dagger(t) \quad (2.109)$$

В результате получим, что уравнение (2.104) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} \hat{X}_s(t, T) \\ \hat{Y}_s(t, T) \end{pmatrix} = -k_s \begin{pmatrix} \hat{X}_s(t, T) \\ \hat{Y}_s(t, T) \end{pmatrix} + 2g A_0(t, T) \begin{pmatrix} \hat{X}_s^\dagger(t, T) \\ \hat{Y}_s^\dagger(t, T) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{F}_s^\dagger(t, T) \\ \hat{F}_s(t, T) \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

Источники поля мы разложили на сопряжённый и антисамосопряжённый оператор

$$\hat{F}_s(t, T) = \hat{F}_s^\dagger(t, T) + i\hat{F}_s^u(t, T) \quad (2.111)$$

В (2.110) мы записали выражения для квадратур отдельно, переписав (2.104) в векторной форме. Выражение (2.110) преобразуется в [15]

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{pmatrix} \hat{X}_s(t, T) \\ \hat{Y}_s(t, T) \end{pmatrix} = -k_\mp(t) \begin{pmatrix} \hat{X}_s(t, T) \\ \hat{Y}_s(t, T) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{F}_s^\dagger(t, T) \\ \hat{F}_s^u(t, T) \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

здесь

$$k_\mp(t) = 1 \mp \frac{2g A_0(t)}{k_s} \quad (2.113)$$

Решением (2.112) будет по аналогии решения (2.85) уравнения (2.83)

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_s(t, T) \\ \hat{Y}_s(t, T) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^T dT' \begin{pmatrix} \hat{F}_s^\dagger(t, T') \\ \hat{F}_s^u(t, T') \end{pmatrix} \exp(-k_\mp(t)(T - T')) \quad (2.114)$$

Из этого мы делаем вывод, что при достижении внешнего поля мощности значения

$$N_{th} \equiv \frac{k_s^2}{4g^2} \quad (2.115)$$

называемого пороговым [15], происходит неограниченное возрастание квадратуры  $\hat{X}_s(t, T)$  и амплитуды сигнального поля. Это значит, что пространственная генерация света происходит в режиме параметрической генерации [15]. При этом происходит неограниченное возрастание амплитуды, выполняется условие пространственного синхронизма [15]

$$\delta k = k_p(\omega_p) - 2k_s(\omega_s/2) = 0 \quad (2.116)$$

До сих пор мы рассматривали непрерывное сигнальное поле  $A_s(t, T)$ . Далее мы будем рассматривать сигнальное поле, составленное из дискретных импульсов [15].

$$A_s(t, T) = \sum_n A_s(t - nT_R) \quad (2.117)$$

При этом происходят следующие замены [15]

$$T \rightarrow nT_R \quad (2.118)$$

$$t \rightarrow t - nT_R \quad (2.119)$$

$$\hat{X}_s(t, T) \rightarrow \hat{X}_{s,n}(t - nT_R) \quad (2.120)$$

$$\hat{Y}_s(t, T) \rightarrow \hat{Y}_{s,n}(t - nT_R) \quad (2.121)$$

Нас интересуют свойства выходного поля  $\hat{A}_{s,n}^{out}(t)$

$$\hat{A}_{s,n}^{out}(t) \equiv \sqrt{2k_s T_R} \hat{A}_s(t, T = nT_R) - \sqrt{\frac{T_R}{2k_s}} \hat{F}_s(t, T = nT_R) \quad (2.122)$$

Разложив его на квадратурные компоненты и воспользовавшись (2.120) и (2.121), получим из (2.112) и (2.88) [15]

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{X}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{X}_{s,n'}^{out}(t' - n'T_R) \rangle \\ \langle \hat{Y}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{Y}_{s,n'}^{out}(t' - n'T_R) \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \delta_{nn'} \delta(t - t') \pm \quad (2.123)$$

$$k_s T_R \frac{u(t - nT_R)}{2(1 \mp u(t - nT_R))} * \exp(-k_{\mp}(t) T_R |n - n'|) \delta(t - t' - (n - n') T_R)$$

Первое слагаемое обусловлено вакуумным полем, отраженным от входного зеркала резонатора, второе связано с сигнальным полем, выходящим из резонатора.  $t - nT_R$  и  $t' - n'T_R$  – отклонения от центров импульсов  $n$  и  $n'$ , поэтому квадратуры коррелированы для временных точек, одинаково отстоящих от центров импульсов [15].

Теперь, в случае

$$n = n' \quad (2.124)$$

получаем [15]

$$\left( \begin{array}{l} \langle \hat{X}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{X}_{s,n}^{out}(t' - nT_R) \rangle \\ \langle \hat{Y}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{Y}_{s,n}^{out}(t' - nT_R) \rangle \end{array} \right) = \frac{1}{4} \delta(t - t') \pm k_s T_R \frac{u(t - nT_R)}{2(1 \mp u(t - nT_R))} \delta(t - t'). \quad (2.125)$$

В случае

$$n \neq n' \quad (2.126)$$

получаем [15]

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \langle \hat{X}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{X}_{s,n'}^{out}(t' - n'T_R) \rangle \\ \langle \hat{Y}_{s,n}^{out}(t - nT_R) \hat{Y}_{s,n'}^{out}(t' - n'T_R) \rangle \end{array} \right) \quad (2.127) \\ & = \pm k_s T_R \frac{u(t - nT_R)}{2(1 \mp u(t - nT_R))} * \exp(-k_{\mp}(t) T_R |n - n'|) \delta(t - t' - (n - n') T_R) \end{aligned}$$

Дельта функция говорит о том, что в разные моменты времени флуктуации некоррелированы. Есть квантовые корреляции X-квадратур, квантовые анти-корреляции Y-квадратур [15].

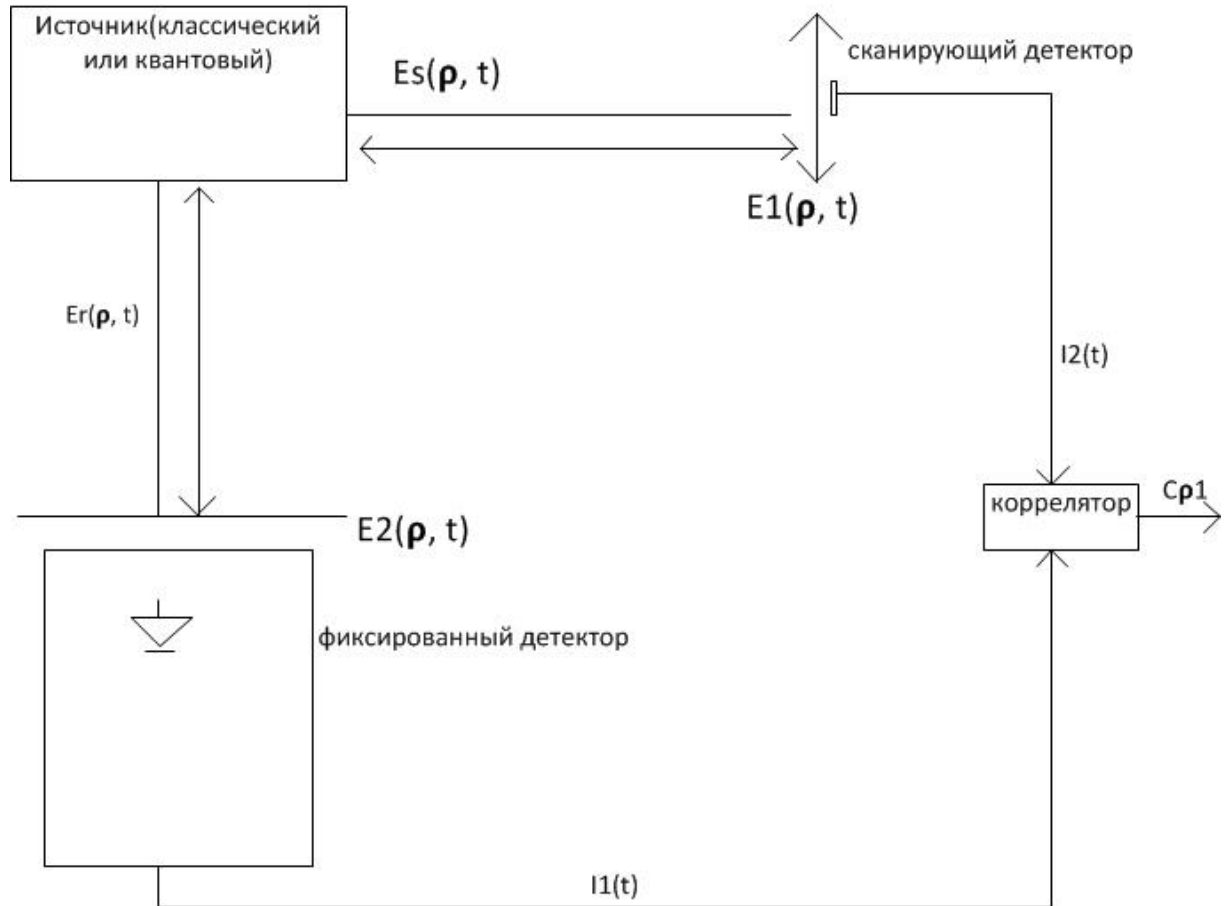


Рис. 2.1: Схема скрытых изображений

Пространственные корреляции исследуются с помощью схемы скрытых изображений, показанной на схеме 2.1 [16]. Из источника поля идут классические или квантовые сигнальное поле  $E_s(\rho, t)$  и опорное поле  $E_r(\rho, t)$ . Далее они могут проходить



через оптические линейные элементы [16]. В опорном канале схемы ставится объект с функцией пропусканием  $T(\rho, t)$ , где  $\rho$  - поперечная координата относительно распространению излучения [16],  $t$  - время. Пройдя через объект, мы имеем излучение  $\widehat{E}_2(\rho, t)$ , которое попадает в детектор [16]. В сигнальном канале устанавливается точечный детектор, который может перемещаться по поперечной координате [16]. Детектор не имеет достаточно расширения для определения пропускающей функции, поэтому полученное изображение называется "скрытым" [16]. Сигналы с детекторов обоих каналов попадают на схему совпадений [16]. В качестве источника света можно использовать бифотонные пары, как это делалось в работе [17]. Для описания процесса передаточную функцию сигнального канала обозначим через  $h_1(\rho, \rho')$ , опорного - за  $h_2(\rho, \rho')$ . Поля в плоскости сигнального детектора  $\widehat{E}_1(\rho)$  и поля в плоскости опорного детектора  $\widehat{E}_2(\rho)$  можно записать [16]

$$\widehat{E}_1(\rho) = \int d\rho'_1 h_1(\rho, \rho'_1) \widehat{E}_S(\rho'_1) + L_1(\rho) \quad (2.128)$$

$$\widehat{E}_2(\rho) = \int d\rho'_2 h_2(\rho, \rho'_2) \widehat{E}_R(\rho'_2) + L_2(\rho) \quad (2.129)$$

где  $L_1(\rho)$  и  $L_2(\rho)$  - потери в соответствующих каналах [16]. Вся информация об объекте содержится в корреляционной функции [16]

$$G^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = \langle I_1(\rho_1) I_2(\rho_2) \rangle - \langle I_1(\rho_1) \rangle \langle I_2(\rho_2) \rangle \quad (2.130)$$

где

$$\langle I_i(\rho_i) \rangle = \langle \widehat{E}_i^\dagger(\rho_i) \widehat{E}_i(\rho_i) \rangle \quad (2.131)$$

$\langle I_i(\rho_i) \rangle$  - средняя интенсивность  $i$ -того пучка.

Пользуясь коммутацией  $\widehat{E}_1$  и  $\widehat{E}_2^\dagger$  и пренебрегая потерями, получим [16]

$$G^{(2)}(\rho_1, \rho_2) = \int d\rho'_1 d\rho''_1 d\rho'_2 d\rho''_2 h_1^*(\rho_1, \rho''_1) h_1(\rho_1, \rho'_1) h_2^*(\rho_2, \rho''_2) h_2(\rho_2, \rho'_2) \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} & \times (\langle \widehat{E}_S^\dagger(\rho''_1) \widehat{E}_S(\rho'_1) \widehat{E}_R^\dagger(\rho''_2) \widehat{E}_R(\rho'_2) \rangle \\ & - \langle \widehat{E}_S^\dagger(\rho''_1) \widehat{E}_S(\rho'_1) \rangle \langle \widehat{E}_R^\dagger(\rho''_2) \widehat{E}_R(\rho'_2) \rangle) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Как видно из 2.134, пространственные корреляции пропорциональны разнице между средним значением произведения интенсивностей сигнальной и опорной волн и произведением средних значений их интенсивностей.

## Глава 3

# Вывод эффективного гамильтониана

### 3.1 Уравнение Шрёдингера с возмущённым Гамильтонианом в представлении взаимодействия

Разложим волновую функцию (в представлении Шрёдингера)  $|\psi(t)\rangle$  по базису собственных функций невозмущённой задачи

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n\rangle \quad (3.1)$$

где  $C_n(t)$  - коэффициенты разложения,  $|n\rangle$  - собственные функции невозмущённой задачи, причём  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ .

Запишем нестационарное возмущённое уравнение Шрёдингера для волновой функции (3.1)

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle \quad (3.2)$$

где  $H_0$  - гамильтониан невозмущённой системы,  $V(t)$  - гамильтониан возмущения. Перепишем волновую функцию в виде

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |\psi^{(I)}(t)\rangle \quad (3.3)$$

где  $|\psi^{(I)}(t)\rangle$  - волновая функция в представлении Дирака. Также выразим гамильтониан возмущения в представлении Дирака.

$$V^{(I)}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) V(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \quad (3.4)$$

Подставим (3.3) и (3.4) в (3.2) и после преобразований получим аналог уравнения (3.2) в представлении Дирака

$$\frac{d}{dt} |\psi^{(I)}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} V^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle \quad (3.5)$$

Мы видим, что в представлении Дирака в уравнении Шрёдингера нет невозмущённого гамильтониана.

### 3.1.1 Разложение волновой функции по степеням возмущения

Разложим волновую функцию  $|\psi^{(I)}(t)\rangle$  по степеням возмущения.

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n)} \quad (3.6)$$

где  $|\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n)}$  - возмущение волновой функции в  $n$ -ом порядке. В качестве нулевого порядка возьмём невозмущённую волновую функцию. Будем считать, что возмущение в системе действует с момента времени  $t_0$ . Возьмём в качестве значения начальной волновой функции её значение в момент времени  $t_0$ .

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle^{(0)} = |\psi^{(I)}(t_0)\rangle \quad (3.7)$$

Подставим (3.6) в (3.5) и получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} |\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n)} = -\frac{i}{\hbar} V^{(I)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} |\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n-1)} \quad (3.8)$$

В условиях принятых приближений дифференцирование нулевого приближения по времени даёт ноль. Справа у нас есть один член нулевого порядка малости  $-\frac{i}{\hbar} V^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle^{(0)}$ , один член первого порядка малости  $-\frac{i}{\hbar} V^{(I)}(t) |\psi^{(I)}(t)\rangle^{(1)}$  и так далее по одному члену  $k$ -ого порядка малости, где  $k$  - целое число, меняющееся от нуля до бесконечности. Значит, слева тоже есть члены всех порядков малости. Поскольку слева мы дифференцируем по времени все ряды малости от одного до бесконечности, то дифференцирование понижает порядок малости. Приравнявая члены одинаковых порядков малости, получаем

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n)} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_n V^{(I)}(t_n) |\psi^{(I)}(t_n)\rangle^{(n-1)} \quad (3.9)$$

Таким образом, по индукции более старшие порядки возмущения волновой функции выражаются через младшие, и все они в конечном итоге, выражаются через начальное значение волновой функции.

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle^{(n)} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n V^{(I)}(t_n) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} V^{(I)}(t_{n-1}) \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 V^{(I)}(t_1) |\psi^{(I)}(t_0)\rangle^{(0)} \quad (3.10)$$

Подставим (3.10) в (3.6) и получим

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n V^{(I)}(t_n) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} V^{(I)}(t_{n-1}) \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 V^{(I)}(t_1) |\psi^{(I)}(t_0)\rangle^{(0)} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Оператор эволюции системы

Введём оператор эволюции системы

$$U^{(I)}(t_0, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n V^{(I)}(t_n) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} V^{(I)}(t_{n-1}) \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 V^{(I)}(t_1) \quad (3.12)$$

Очевидно, что

$$|\psi^{(I)}(t)\rangle = U^I(t_0, t)|\psi^{(I)}(t_0)\rangle \quad (3.13)$$

В операторе (3.12) времена  $t_0, t_1$  и т. д. идут в следующем порядке:

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \cdots \leq t_n \leq t \quad (3.14)$$

Оператор (3.12) можно представить графически

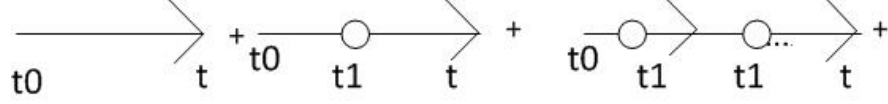


Рис. 3.1: Диаграмма оператора эволюции

### 3.1.3 Амплитуда рассеяния

Назовём начальное состояние системы  $|n_0\rangle$

$$|\psi^{(I)}(t_0)\rangle = |n_0\rangle \quad (3.15)$$

Рассмотрим матричный элемент оператора (3.12)

$$\langle n|U(t_0, t)|n_0\rangle = U_{nn_0}^{(I)}(t_0, t) \quad (3.16)$$

Этот элемент называется амплитудой рассеяния из состояния  $|n_0\rangle$  в состояние  $|n\rangle$ . Он переводит систему из состояния  $|n_0\rangle$ , в котором она была в момент времени  $t_0$ , в состояние  $|n\rangle$ , в которое она попадает в результате возмущения  $V^{(I)}$  в момент времени  $t$ . Единица в начале (3.12) - единичный оператор, действующий на начальное состояние  $|n_0\rangle$  в (3.16). Запишем этот единичный оператор в виде

$$\hat{I} = \sum_n |n\rangle\langle n| \quad (3.17)$$

где  $|n\rangle$  - собственные состояния невозмущённой сттемы.

$$\sum_n |n\rangle\langle n||n_0\rangle = |n_0\rangle = |n\rangle\delta_{nn_0} \quad (3.18)$$

Эта запись означает, что в момент времени  $t$  при отсутствии возмущения система остаётся в состоянии  $|n_0\rangle$ . Перерисуем диаграмму (3.1) для матричного элемента (3.16)

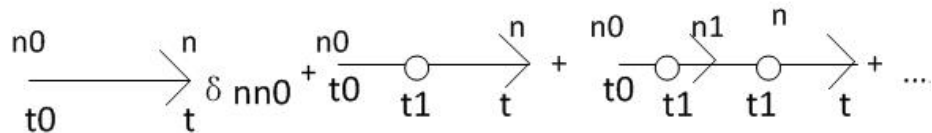


Рис. 3.2: диаграмма матричного элемента

Фактически, это означает, что система идёт по промежуточным квантовым состояниям  $|n_1\rangle$ ,  $|n_2\rangle$  и т. д.

Запишем оператор возмущения  $V^{(I)}(t)$  в представлении Дирака

$$V^{(I)}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)V(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right) \quad (3.19)$$

Оператор эволюции (3.12) принимает вид

$$\begin{aligned} U^{(I)}(t_0, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_n\right)V(t_n) \\ \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_n\right) \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_{n-1}\right)V(t_{n-1}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_{n-1}\right) \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_1\right)V(t_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_1\right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Вставим между экспонентами  $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_{k+1}\right)$  и  $\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_k\right)$  единичные операторы, выраженные через проекторы на собственные состояния квантовой системы

$$\hat{I} = \sum_{n_k} |n_k\rangle\langle n_k| \quad (3.21)$$

Раскладывая экспоненты в ряд Тейлора, подействовав оператором  $H_0$  на суммы, получим

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_{k+1}\right) \sum_{n_k} |n_k\rangle\langle n_k| \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_k\right) = \exp\left(-i\omega_{n_k}t_{k+1}\right) \exp\left(i\omega_{n_k}t_k\right) \quad (3.22)$$

Запишем элемент суммы в (3.21), отвечающий моменту времени  $t_k$  в следующем виде:

$$-\frac{i}{\hbar}V^{(I)}(t_k) = -\frac{i}{\hbar} \exp\left(i\omega_{n_{k-1}}t_k\right)V(t_k) \exp\left(-i\omega_{n_{k-1}}t_k\right) \quad (3.23)$$

В этот момент времени происходит переход

$$-\frac{i}{\hbar}V^{(I)}(t_k) \equiv -\frac{i}{\hbar}V_{n_k n_{k-1}}^{(I)}(t_k) = -\frac{i}{\hbar} \exp\left(i\omega_{n_k}t_k\right)V_{n_k n_{k-1}}(t_k) \exp\left(-i\omega_{n_{k-1}}t_k\right) \quad (3.24)$$

Это можно обозначить графически.

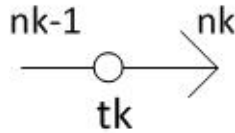


Рис. 3.3: Диаграмма единичного перехода

Распишем в выражении (3.16) распишем аналогично через экспоненты первое и последнее действие оператора возмущения

$$\sum_{n_1} |n_1\rangle\langle n_1| \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t_1\right)V(t_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t_1\right)|n_0\rangle \quad (3.25)$$

$$= \sum_{n_1} |n_1\rangle\langle n_1| \exp\left(i\omega_{n_1}t_1\right)V(t_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega_{n_0}t_1\right)|n_0\rangle \quad (3.26)$$

$$\langle n | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_n\right) | V(t_n) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_n\right) \sum_{n_{n-1}} | n_{n-1} \rangle \langle n_{n-1} | \quad (3.27)$$

$$= \langle n | \exp(i\omega_{n_1} t_1) | V(t_1) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \omega_{n_{n-1}} t_1\right) \sum_{n_{n-1}} | n_{n-1} \rangle \langle n_{n-1} | \quad (3.28)$$

## 3.2 Эффективный гамильтониан

Рассмотрим атом, у которого два энергетических уровня. В начальный момент времени  $t_0$  он находится в возбуждённом состоянии. Тогда элемент описывающей его матрицы плотности  $\rho(t)$  в начальный момент времени

$$\rho_{22}(t_0) = 1 \quad (3.29)$$

остальные элементы матрицы плотности в начальный момент времени равны нулю [18]. Будем считать, что диагональные матричные элементы оператора дипольного момента отличны от нуля, т. е. возможен переход с одного уровня на другой с частотой перехода  $\omega_{21}$ . Найдём вероятность обнаружить атом в состоянии  $|2\rangle$  в момент времени  $t$ , т. е. вероятность обнаружить его в возбуждённом состоянии. Вероятность определяется элементом матрицы плотности  $\rho_{22}(t)$ .

$$\rho_{22}(t) = \text{tr}(\rho(t) |2\rangle \langle 2|) \quad (3.30)$$

Переход из состояния  $|2\rangle$  в состояние  $|2\rangle$  определяется пропагатором (матричным элементом матрицы рассеяния), который представляется суммой диаграмм [18]

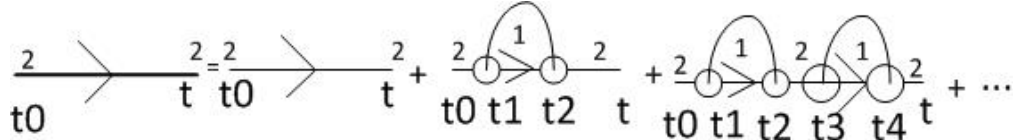


Рис. 3.4: диаграмма перехода из состояния 2 в состояние 2

Электрическое поле в представлении взаимодействия записывается [18]

$$\vec{E}^{(I)}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \vec{e}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} \exp(-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{r})) \quad (3.31)$$

Усреднение элементарного перехода с момента времени  $t_j$  к моменту времени  $t_{j+1}$  в каждой сумме диаграммы 3.4 записывается через вакуумные состояния

$$\sum_{22} (t_{j+1} - t_j) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \langle vac | (\vec{d}_{21}^{(I)}(t_{j+1}) \vec{E}^\dagger(\vec{r}, t_{j+1})) (\vec{E}^-(\vec{r}, t_j) \vec{d}_{12}(t_j)) | vac \rangle \quad (3.32)$$

где  $\vec{d}_{21}^{(I)}(t_{j+1})$ ,  $\vec{d}_{12}(t_{j+1})$  - элементы дипольного момента в представлении Дирака в момент  $t_{j+1}$ .

$$\vec{d}_{12}^{(I)}(t_j) = \langle 1 | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_j\right) \vec{d} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_j\right) | 2 \rangle = \exp(-i\omega_{21} t_j) \vec{d}_{12} \quad (3.33)$$

$$\vec{d}_{21}^{(I)}(t_{j+1}) = \langle 2 | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_{j+1}\right) \vec{d} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_{j+1}\right) | 1 \rangle = \exp(-i\omega_{21} t_{j+1}) \vec{d}_{12} \quad (3.34)$$

Правый член (3.32) описывает виртуальный переход атома из возбуждённого состояния в невозбуждённое с излучением фотона, левый наоборот, виртуальный переход из основного в возбуждённый с поглощением фотона [18].

Введём обозначения

$$g_{12}^{\vec{k}\lambda} \equiv \vec{d}_{12} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} (\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \vec{d}_{12}) \quad (3.35)$$

$$g_{21}^{\vec{k}\lambda} \equiv \vec{d}_{12} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} (\vec{d}_{21} \vec{e}_{\vec{k}\lambda}) \quad (3.36)$$

С учётом [18]

$$\langle vac | a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}^* | vac \rangle = \delta_{\vec{k}\lambda \vec{k}\lambda} \quad (3.37)$$

(3.32) можно переписать

$$\sum_{22} (t_{j+1} - t_j) = 1 * \left( -\frac{1}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t_{j+1} - t_j)) \right) * 1 \quad (3.38)$$

Единицы в начале и в конце означают, что вероятность найти в возбуждённом состоянии в начале и в конце элементарного процесса равна 1.

Напомним, что если при  $t \geq 0$  задана  $g(t)$ , то её Лаплас-образ будет [18]

$$g(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) g(t) \quad (3.39)$$

Обратное преобразование Лапласа [18]

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp \exp(pt) g(p) \quad (3.40)$$

Если функция  $g(t - t_0)$  имеет вид

$$g(t - t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt_n \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 g_n(t - t_n) g_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \cdots g_0(t_1 - t_0) \quad (3.41)$$

причём  $t \geq t_0 \geq t_1 \geq t_2 \cdots t_n$ , то  $g(t - t_0)$  - свёртка. Сделав замену [18]

$$t - t_n = \tau_n \quad (3.42)$$

...

$$t_1 - t_0 = \tau_0 \quad (3.43)$$

получим

$$\int_{t_0}^\infty dt \int_{t_0}^t dt_n \cdots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \prod_{m=0}^n \int_{t_0}^\infty d\tau_m \quad (3.44)$$

$$\exp(-p(t - t_0)) = \exp(-p(t - t_n)) \cdots \exp(-p(t - t_0)) = \prod_{m=0}^n \exp(-ip\tau_m) \quad (3.45)$$

Каждое слагаемое (3.38) имеет вид свёртки для Лаплас-преобразования. Найдём Лаплас-образ (3.38), введя обозначения

$$g_{j-1}(t_{j-1}) \equiv 1 \quad (3.46)$$

$$g_j(\tau_j) \equiv \sum_{22} (t_{j+1} - t_j) = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t_{j+1} - t_j)) \quad (3.47)$$

$$g_{j+1}(t_{j+1}) \equiv 1 \quad (3.48)$$

Сделаем Лаплас преобразование для каждого из выражений (3.46), (3.47), (3.48).

$$g_{j-1}(p) = g_{j+1}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) dt = \frac{1}{p} \quad (3.49)$$

$$g_j(p) = - \int_0^\infty dt \frac{1}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \exp(-i(\omega_k - \omega_{21})(t_{j+1} - t_j)) dt \quad (3.50)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \frac{1}{p + i(\omega_k + \omega_{21})} \quad (3.51)$$

$$= \frac{i}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \frac{1}{(\omega_k + \omega_{21} - i\alpha)} \equiv \sum_{22}(p)$$

Здесь

$$0 < \text{Re}\alpha \ll \omega_{21} \quad (3.52)$$

Получается, Лаплас образ (3.38)

$$\frac{1}{p} \sum_{22}(p) \frac{1}{p} \quad (3.53)$$

Лаплас-образ для (3.38) будет

$$\frac{1}{1 + i(\omega_k - \omega_{21})} \quad (3.54)$$

Дальше сводится к

$$\sum_{22}(p \rightarrow \alpha) = \frac{i}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \frac{1}{\omega_k - \omega_{21} - i\alpha} \quad (3.55)$$

$$\sum_{22}(p \rightarrow 0) = \frac{i}{\hbar^2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \sum_{\lambda} g_{21}^{\vec{k}\lambda} g_{12}^{\vec{k}\lambda} \left[ \frac{P}{\omega_k - \omega_{21}} - i\pi\delta(\omega_k - \omega_{21}) \right] \equiv -\frac{i}{\hbar} \Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2} \equiv \sum_{22} \quad (3.56)$$

Лаплас образ  $U_{22}^{(I)}(t)$  будет следующая сумма [18]

$$U_{22}^{(I)}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \sum_{22} \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \sum_{22} \frac{1}{p} \sum_{22} \frac{1}{p} + \dots \quad (3.57)$$

Этот ряд - геометрическая прогрессия [18]

$$U_{22}^{(I)}(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 - \frac{\sum_{22}(p)}{p}} = \frac{1}{p - \sum_{22}} \quad (3.58)$$



Применим к этому выражению обратное преобразование Лапласа. При интегрировании контур замыкается по полуплоскости  $\text{Re } p < 0$ , считается полюс в точке  $p = -\frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2}$  и получим

$$U_{22}^{(I)}(0, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2}\right) \quad (3.59)$$

В этом выражении узнаётся закон радиоактивного распада [18]. Элемент  $U_{22}^{(I)}(0, t)$  называется пропагатором.

Можно получить комплексно-сопряжённый пропагатор к этому пропагатору. Он соответствует проходу по контуру Переля-Константинова в противоположную сторону.

$$\langle 2|U^{(I)\dagger}(0, t)|2 \rangle = |U_{nm}^{(I)\dagger}(0, t) \quad (3.60)$$

Все выражения в результате получаются комплексно-сопряжёнными

$$\sum_{22}^{\sim}(p \rightarrow 0) = \frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2} \quad (3.61)$$

$$U^{(I)\dagger}(0, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2}\right) \quad (3.62)$$

Такое взаимодействие можно описать эффективным гамильтонианом взаимодействия. Для описания перехода в одну сторону будет

$$\sum_{22}(p \rightarrow 0) = -\frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2} = -\frac{i}{\hbar}V_{22}^{eff} \quad (3.63)$$

для описания перехода в другую будет

$$\sum_{22}^{\sim}(p \rightarrow 0) = \frac{i}{\hbar}\Delta E_2 - \frac{\gamma_2}{2} = \frac{i}{\hbar}V_{22}^{eff} \quad (3.64)$$

## Глава 4

# Оператор рассеяния

### 4.1 Обозначения

Рассмотрим систему, состоящую из молекулы, находящейся в начальный момент времени в квантовом состоянии  $|a\rangle$  и поля, у которого  $N_1$  частиц, находящихся в моде  $k_1$ ,  $N_2$  частиц, находящихся в моде  $k_2$  и  $N_3$  частиц, находящихся в моде  $k_3$ . Будем обозначать квантовое состояние поля

$$|N_1, N_2, N_3\rangle = |i'\rangle \quad (4.1)$$

Общее начальное квантовое состояние системы будем обозначать

$$|i\rangle = |a, N_1, N_2, N_3\rangle = |a\rangle |i'\rangle \quad (4.2)$$

Параметрическому рассеянию соответствует конечное состояние системы

$$|f\rangle = |a, N_1 + 1, N_2 + 1, N_3 - 1\rangle = |a\rangle |f'\rangle \quad (4.3)$$

Переход из состояния 4.1 в 4.3 идёт по виртуальным состояниям системы и возможен несколькими способами. Рассмотрим один из них.

Допустим, что на первом этапе молекула переходит из квантового состояния  $|a\rangle$  в  $|b\rangle$ , а поле из квантового состояния  $|i'\rangle$  переходит в квантовое состояние  $|v_1'\rangle$

$$|v_1'\rangle = |N_1 + 1, N_2, N_3\rangle \quad (4.4)$$

Общее состояние системы

$$|v_1\rangle = |b\rangle |v_1'\rangle = |b, N_1 + 1, N_2, N_3\rangle \quad (4.5)$$

То есть энергия молекулы понизилась и её часть перешла в энергию фотона в первой моде.

Предположим, что затем молекула переходит из квантового состояния  $|b\rangle$  в состояние  $|c\rangle$ , а поле из квантового состояния  $|v_1'\rangle$  переходит в квантовое состояние  $|v_2'\rangle$

$$|v_2'\rangle = |N_1 + 1, N_2 + 2, N_3\rangle \quad (4.6)$$

Общее состояние системы

$$|v_2\rangle = |c\rangle |v_2'\rangle = |c, N_1 + 1, N_2 + 1, N_3\rangle \quad (4.7)$$

То есть энергия молекулы ещё понизилась и её часть перешла в энергию фотона во второй моде.

И на последнем шаге энергия молекулы возвращается в своё начальное квантовое состояние  $|a\rangle$ , при этом забирая энергию у моды  $k_3$ . Поле при этом переходит в квантовое состояние  $|f'\rangle$

$$|f'\rangle = |N_1 + 1, N_2 + 2, N_3 - 1\rangle \quad (4.8)$$

Общее состояние симтемы

$$|f\rangle = |a\rangle |f'\rangle = |a, N_1 + 1, N_2 + 1, N_3 - 1\rangle \quad (4.9)$$

Также молекула может отдавать энергию модам  $k_1$  и модам  $k_2$  и брать энергию у моды  $k_3$  в любом порядке.

## 4.2 Математическое описание

Опишем переходы из (4.2) в (4.5), из (4.5) в (4.7), из (4.7) в (4.9) математически. Из (4.2) в (4.5):

$$\langle v_1 | \hat{v} | i \rangle = - \langle N_1 + 1, b | dE | N_1, a \rangle = - \langle v_1 | d_{ba} E_1^{(-)} | i \rangle \quad (4.10)$$

Здесь  $\hat{v}$  - оператор перехода системы, знак  $-$  означает, что молекула теряет энергию. Из 4.5 в 4.7:

$$\langle v_2 | \hat{v} | v_1 \rangle = - \langle N_2 + 1, c | dE | N_2, b \rangle = - \langle v_2 | d_{cb} E_2^{(-)} | v_1 \rangle \quad (4.11)$$

Из (4.7) в (4.9):

$$\langle f | \hat{v} | v_2 \rangle = \langle N_3 - 1, a | dE | N_3, c \rangle = \langle f | d_{ac} E_3^{(+)} | v_2 \rangle \quad (4.12)$$

## 4.3 Разные представления

Пусть у нас есть возмущённая система с гамильтонианом  $\hat{H}^{Sh}$

$$\hat{H}^{Sh} = \hat{H}_0^{Sh} + \hat{V} \quad (4.13)$$

где  $\hat{H}_0^{Sh}$  - гамильтониан невозмущённой системы,  $\hat{V}$  - гамильтониан возмущения

$$\hat{V} \ll \hat{H}_0^{Sh} \quad (4.14)$$

Это запись в представлении Шрёдингера. В представлении Шрёдингера операторы не зависят от времени.

Определим оператор эволюции [19]

$$\widehat{U}_0(t) = \exp(-i\widehat{H}_0^{Sh}(t-t_0)/\hbar) \quad (4.15)$$

$t$  - время,  $t_0$  - определённый момент времени.

С помощью этого оператора определим правило перевода операторов  $\widehat{f}^{Sh}$  и состояний  $|t >^{Sh}(t)$  в представлении Шрёдингера к виду операторов и состояний в представлении взаимодействия (представлении Дирака)  $\widehat{f}^0(t)$ ,  $|t >^0(t)$  [19]

$$\widehat{f}^0(t) = \widehat{U}_0^\dagger(t)\widehat{f}^{Sh}\widehat{U}_0(t) \quad (4.16)$$

$$|t >^0(t) = \widehat{U}_0^\dagger(t)|t >^{Sh}(t) \quad (4.17)$$

Определим другой оператор эволюции [19]

$$\widehat{U}(t) = \exp(-i\widehat{H}^{Sh}(t-t_0)/\hbar) \quad (4.18)$$

С помощью этого оператора определим правило перевода операторов  $\widehat{f}^{Sh}$  и состояний  $|t >^{Sh}(t)$  в представлении Шрёдингера к виду операторов и состояний в представлении Гейзенберга  $\widehat{f}^G(t)$ ,  $|t >^G$  [19]

$$\widehat{f}^G(t) = \widehat{U}^\dagger(t)\widehat{f}^{Sh}\widehat{U}(t) \quad (4.19)$$

$$|t >^G = \widehat{U}^\dagger(t)|t >^{Sh}(t) \quad (4.20)$$

Из этих выражений можно получить правила перехода из представления Гейзенберга в представление взаимодействия.

$$\widehat{f}^0(t) = \widehat{U}_0^{-1}(t)\widehat{U}(t)\widehat{f}^G(t)\widehat{U}^{-1}(t)\widehat{U}_0(t) \quad (4.21)$$

$$|t >^0(t) = \widehat{U}_0^{-1}(t)\widehat{U}(t)|t >^G \quad (4.22)$$

Определим оператор перехода из представления взаимодействия в представление Гейзенберга [19]

$$\widehat{S}(t) \equiv \widehat{U}_0^{-1}(t)\widehat{U}(t) = \exp(iH_0^{Sh}(t-t_0)/\hbar)\exp(-iH^{Sh}(t-t_0)/\hbar) \quad (4.23)$$

Это унитарный оператор, как операторы  $\widehat{U}_0(t)$ ,  $\widehat{U}(t)$ . Обе экспоненты можно разложить в ряд Тейлора по переменной  $t-t_0$ . Перемножив результаты, мы получим [19]

$$\widehat{S}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}V(t-t_0) - \frac{V^2}{2\hbar^2}(t-t_0)^2 + O(t-t_0)^3 \quad (4.24)$$

$O(t-t_0)^3$  - члены разложения порядка выше  $(t-t_0)^2$ .

## 4.4 Теория рассеяния

К оператору  $S$  можно применить теорию рассеяния [19].

$$\hat{S}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{S}^{(m)}(t) \quad (4.25)$$

Здесь  $\hat{S}^m(t)$  - член с множителем  $(t - t_0)^m$  из разложения (4.24).

Как видно из (4.23), оператор  $\hat{S}(t)$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера [19]

$$i\hbar \dot{\hat{S}} = \hat{V}_0 \hat{S} \quad (4.26)$$

Подставив (4.25) в (4.26), получим

$$i\hbar \dot{\hat{S}}^m = \hat{V}^0 \hat{S}^{m-1} \quad (4.27)$$

Таким образом, более высокие порядки теории возмущения оператора  $S$  можно выразить через младшие [19].

$$\hat{S}^m(t) = \frac{1}{(i\hbar)^m} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m V^0(t_1) \dots V^0(t_m) \quad (4.28)$$

## 4.5 Конкретная система

Пусть у нас заданы собственные состояния невозмущённой системы [19].

$$|n\rangle = |\psi_n(t)\rangle \quad (4.29)$$

В момент времени  $t_0$  система находится в одном из них. Обозначим его за  $|n_0\rangle$ . Рассмотрим замкнутую систему, где гамильтониан взаимодействия  $\hat{V}$  - энергия взаимодействия между частицами. Рассмотрим эволюцию возмущённой системы в представлении Гейзенберга [19]

$$|n\rangle = \hat{U}|n_0\rangle = \hat{U}_0 \hat{S}|n_0\rangle = \sum_n \hat{U}_0 |n\rangle \langle n|\hat{S}|n_0\rangle = \sum_n |n, t^0\rangle \langle n|\hat{S}|n_0\rangle \quad (4.30)$$

Получается, что оператор  $\hat{S}(t)$  отвечает за переход системы из состояния  $|n_0\rangle$  в состояние  $|n\rangle$ . Поэтому он называется оператором рассеяния, и квадрат модуля его матричного элемента - вероятность перехода из состояния  $|n_0\rangle$  в состояние  $|n\rangle$  [19].

$$P_{nn_0} = |\hat{S}_{nn_0}|^2 = |\langle n|t, t^0\rangle|^2 = |\langle n|t^0\rangle|^2 \quad (4.31)$$

При  $t - t_0 = \infty$  в случае  $\hat{V}^{Sh}(t) = \text{const}$  из (4.28) следует [19]

$$\begin{aligned} \hat{S}_{nn_0}^m &= (i\hbar)^{-m} \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \dots \int_{-\infty}^{t_2} t_1 \sum_{n_1 \dots n_{m-1}} V_{nn_{m-1}} \dots V_{n_1 n_0} \\ &\quad * \exp(i\omega_{nn_{m-1}t_m} + \dots i\omega_{n_1 n_0} t_1) = -i2\pi\delta(\epsilon_n - \epsilon_{n_0}) T_{nn_0}^m \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$T_{nn_0}^m = \sum_{n_1 \dots n_m} \frac{\langle n|V|n_{m-1} \rangle \dots \langle n_1|V|n_0 \rangle}{\hbar^{m-1}(\omega_{n_0 n_{m-1}} + i\epsilon) \dots (\omega_{n_0 n_1} + i\epsilon)} \quad (4.33)$$

Мы воспользовались [19]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t dt \exp(i\omega t) = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.34)$$

Воспользовавшись последними выражениями и свойствами оператора рассеяния, из (4.10) можно получить

$$\langle v_1|\hat{v}|i \rangle = - \langle v_1|\frac{d_{ba}E_j^-}{\hbar(w_{ab} - w_1)}|i \rangle \quad (4.35)$$

из (4.11)

$$\langle v_2|\hat{v}|v_1 \rangle = - \langle v_2|\frac{d_{ba}E_j^-}{\hbar(w_{ac} - w_2)}|v_1 \rangle \quad (4.36)$$

И общий переход из состояния  $|i \rangle$  в  $|f \rangle$  [19]

$$T_{321} = - \langle f|\sum_{bc} \frac{(d_{ac}E_3^\dagger)(d_{cb}E_2^-)(d_{ba}E_1^-)}{\hbar^2(\omega_{ac} - \omega_2)(\omega_{ab} - \omega_1)}|i \rangle \quad (4.37)$$

Эффективный гамильтониан и формула 4.37 позволяют вычислить вероятность трёх-фотонного процесса - параметрического рассеяния света на веществе и, соответственно, вычислить интенсивность получившейся сигнальной волны.

## Заключение

В введении рассмотрены параметрические процессы: перенос спектра в оптическую область, параметрическая генерация, генерация высших гармоник, параметрическое усиление, параметрическое рассеяние, спонтанное параметрическое рассеяние, гипер-параметрическое рассеяние. В ходе спонтанного параметрического рассеяния рождаются перепутанные пары фотонов, которые могут быть использованы в качестве строительных блоков в квантовой оптике и квантовой информатике. Также приведены экспериментальные подтверждения некоторых из этих процессов. Ещё в введении продемонстрировано описание света и вещества эффективным гамильтонианом, что облегчает описание.

Во второй части рассмотрены корреляции, корреляционные функции и их свойства. Выходное поле кольцевого резонатора получено в виде суммы огибающих. В виде суммы огибающих представлено решение уравнения Гайзенбрга-Ланжевена, описывающее огибающую импульса сигнальной волны в лазере. Огибающие представлены в виде суммы квадратур, потому что квадратуры можно измерить на эксперименте. Найдены временные корреляции квадратур. Показано, как с помощью схемы скрытых изображений можно измерить пространственные корреляции света.

В третьей части дан вывод эффективного гамильтониана. В четвёртой рассмотрены представления Шрёдингера, взаимодействия (Дирака) и Гейзенберга описания

волновой функции и квантово-механических операторов. Рассмотрен оператор рассеяния, как оператор перехода из представления Гейзенберга в представление взаимодействия. Эффективный гамильтониан и оператор рассеяния позволяют вычислять вероятность трёхфотонных процессов в акте рассеяния фотона на веществе.

# Литература

- [1] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, "Generation of optical harmonics" // Phys. Rev. 1961. т. **7** . с. 118
- [2] M. Ferray et al. "Multiple-harmonic conversion of 1064 nm radiation in rare gases"// Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, т. **21**. с. 31
- [3] S.A. Akhmanov, A.I. Kovrigin, A.S. Piskarskas, V.V. Fadeev and R.V. Khokhlov. "Observation of parametric amplification in the optical range"// Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 1965. Vol. **2**, p.191
- [4] J. Giordmaine; R. Miller. "Tunable Coherent Parametric Oscillation in LiNbO3 at Optical Frequencies"// Phys. Rev. 1965. т. **14**. с. 973
- [5] А.А. Калачёв. "Спонтанное параметрическое рассеяние и задачи квантовой информатики. Учебно-методическое пособие Казанский университет"// Казанский (Приволжский) федеральный университет. 2012.
- [6] Y. Shih and C. Alley and Namiki et al., eds., "in Proceedings of the 2nd Int'l Symposium on Foundations of QM in Light of New Technology"// Physical Society of Japan, Tokyo. 1986.
- [7] R. Ghosh and L. Mandel. "Observation of Nonclassical Effects in the Interference of Two Photons", Phys. Rev. 1987. т. **59**. с. 1903
- [8] H. R. Robl-In. Quantum Electronics.-N. Y. 1964.
- [9] А. А. Гринберг, С. М. Рывкин, И. М. Фишман и др. Письма в ЖЭТФ. 1968. т. **7**. с. 324
- [10] G. H. C. New and J. F. Ward. "Optical Third-Harmonic Generation in Gases". Phys. Rev.1967. т. **19**. с. 556
- [11] С. А. Ахманов Ю. Е. Дьяков А. С. Чиркин. "Введение в статистическую радиофизику и оптику" // Москва "Наука" Главная редакция физико-математической литературы. 1981.



- [12] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц "Статистическая физика" том 1
- [13] А. С. Давыдов. "Квантовая механика"// 2-е изд. перераб., учебник Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука". 1973.
- [14] Я. Перица. "Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений"// 1987.
- [15] В. А. Аверченко. "Квантовые корреляции импульсного излучения вырожденного параметрического генератора света с синхронной накачкой"// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2011.
- [16] И. Б. Бобров. "Пространственные корреляции в бифотонных и классических полях"// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2017.
- [17] T. B. Pittman, Y. H. Shih, D. V. Strekalov, A. V. Sergienko. "Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement"// Phys. Rev. A. 1995. т. **52**. с. 3429
- [18] И. В. Соколов. "Диаграммный метод теории возмущений Переля-Константинова в задачах квантовой оптики"// 2016.
- [19] Д. Н. Клышко. "Фотоны и нелинейная оптика"// - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980.